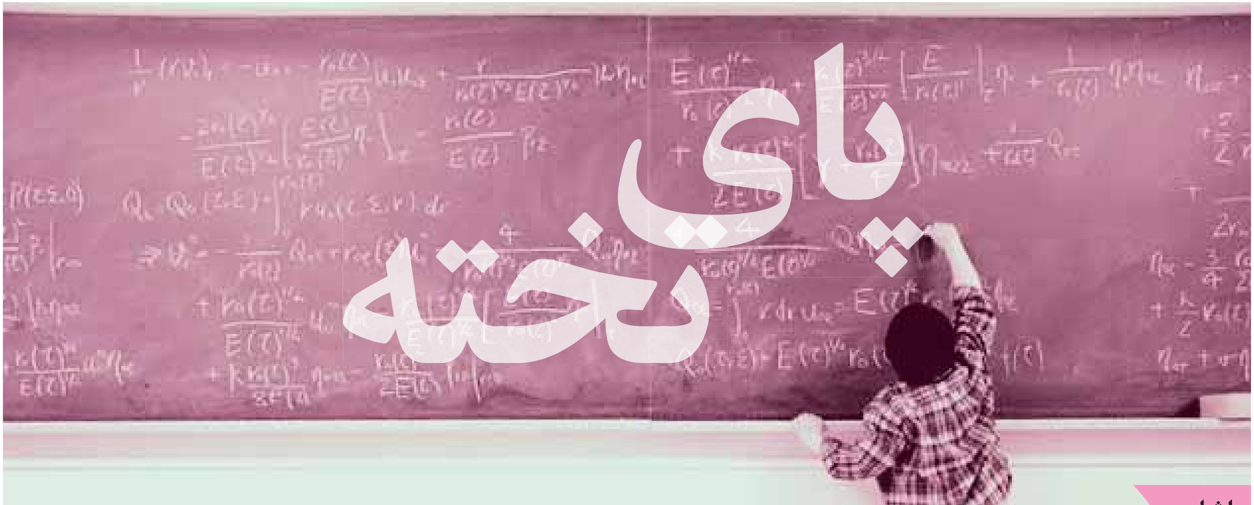
دکتر محرم نژاد ایردموسی



پای تخته

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه‌حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی‌که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

نکتهٔ آخر اینکه در چند شمارهٔ اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه‌حل‌ها به‌تدریج پربارتر خواهد شد. منتظر راه‌حل‌های ارسالی شما هستیم.

■ بخش اول: مسئله‌ها

۱۵۱. اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+ax+b+۱=۰$ طبیعی باشند، ثابت کنید $a^۲+b^۲$ عددی مرکب است.

۱۵۲. همهٔ جواب‌های طبیعی معادلهٔ زیر را پیدا کنید.

$$m^۲-۳m+۱=n^۲+n-۱$$

۱۵۳. ضرایب تابع $p(x)=ax^۲+bx+c$ اعدادی حقیقی هستند و مقادیر $p(۰)$، $p(۱)$ و $p(-۱)$ صحیح‌اند. ثابت کنید $p(n)$ به ازای همهٔ مقادیر صحیح n صحیح است.

۱۵۴. $p(x)$ یک چندجمله‌ای است، به‌طوری‌که: $p(x^۲+۱)=x^۴+۴x^۲$. مطلوب است: $p(x^۲-۱)$.

۱۵۵. a، b، c و d اعدادی طبیعی هستند، به‌طوری‌که: $a+b=c+d$ و $a^۳+b^۳=c^۳+d^۳$. ثابت کنید دو تا از این اعداد با هم برابر هستند.

۱۵۶. با فرض $n > r > ۰$ ثابت کنید:

$$\binom{n}{r}^۲ > \binom{n}{r+۱}\binom{n}{r-۱}$$

۱۵۷. با فرض $a < b$ ثابت کنید:

$$\binom{a}{۲}+\binom{b}{۲} \geq \binom{a+۱}{۲}+\binom{b-۱}{۲}$$

۱۵۸. سیزده نقطه با مختصات صحیح در صفحه مفروض‌اند. ثابت کنید چهار نقطه در میان آن‌ها وجود دارند که مرکز ثقل این چهار نقطه مختصاتی صحیح دارد (مختصات مرکز ثقل k نقطه برابر است با میانگین مختصات آن k نقطه).

۱۵۹. اعداد ۱ تا n روی تختهٔ سیاه نوشته شده‌اند. می‌خواهیم برای این اعداد علامت مثبت یا منفی بگذاریم، به‌طوری‌که مجموع اعداد حاصل صفر شود. به ازای چه مقادیری از n این کار امکان‌پذیر است؟

۱۶۰. ثابت کنید تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی یک عدد مانند n، فرد است، اگر و تنها اگـر n مربع کامل باشد.

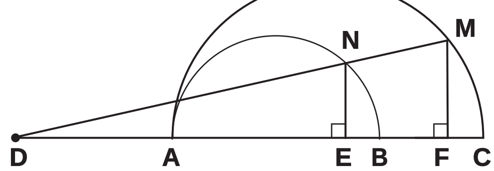
■ بخش دوم: راه‌حل‌ها

۱۱۱. دو نیم‌دایـره بـه قطرهـای AB و AC در نقطهٔ A مماس درونی‌اند. پاره‌خط‌های مسـاوی BE و CF را روی AC جدا می‌سازیم و عمودهای EN و FM را در ایـن نقـاط بـر AC اخـراج می‌کنیم تا نیم‌دایره‌ها را در N و M قطع کنند. اگر امتدادهای AC و MN یکدیگر را در نقطهٔ D قطع کنند، ثابت کنید:

الف) AE*AF=AD۲

ب) NE*MF=AD*BE

(طراح مسئله: هوشنگ شرقی، دبیر ریاضی و عضو هیئت تحریریه)



از قضیهٔ تالس در مثلث DMF داریم:

$$\frac{DE}{DF}=\frac{NE}{MF}\Rightarrow\frac{AD+AE}{AD+AF}=\frac{NE}{MF}$$
$$\Rightarrow\left(\frac{AD+AE}{AD+AF}\right)^2=\frac{NE^2}{MF^2}\quad(*)$$

در مثلث‌هـای قائم‌الزاویـهٔ ANB و AMC (زوایای ANB و AMC محاطی رو به قطر و 90° هستند) داریم: $NE^2=AE.BE$ و $MF^2=AF.FC$. بنابرایـن با جایگزینی در رابطهٔ (*) خواهیم داشت:

$$\frac{AD^2+AE^2+2AD.AE}{AD^2+AF^2+2AD.AF}=\frac{AE.BE}{AF.FC}=\frac{AE}{AF}$$
$$\Rightarrow(AD^2+AE^2+2AD.AE)AF$$
$$=(AD^2+AF^2+2AD.AF).AE$$
$$\Rightarrow AD^2.AF+AE^2.AF=AD^2.AE+AF^2.AE$$
$$\Rightarrow AD^2(AF-AE)=AE.AF(AF-AE)$$
$$\Rightarrow AD^2=AE.AF$$

برای قسمت دوم می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l}NE^2=AE.BE\\MF^2=AF.FC\end{array}\right\}\Rightarrow NE^2.MF^2=(AE.AF).(BE.FC)$$
$$\Rightarrow NE^2.MF^2=AD^2.BE^2\Rightarrow NE.MF=AD.BE$$

۱۱۲. یک مربع را داخل یک مربع دیگر انداخته‌ایم. ثابت کنید اگر رئـوس متناظر ایـن دو مربع را به‌هم وصـل کنیم، از چهـار ناحیهٔ حاصل، مجمـوع مسـاحت‌های دو ناحیه بـا مجموع مسـاحت‌های دو ناحیـهٔ دیگـر برابـر اسـت (طراح مسئله: نفیسه آغویی، دانش‌آموز مرکز فرزانگان چهاردانگه).

این مسئله در شماره‌های قبل (مسئلهٔ ۹۲) حل شده است.

۱۱۳. چهـار نفـر ماهی‌گیر روی هـم ۱۱ ماهی صید کردند، به‌طوری که هر کدام حداقل یک ماهی صید کردند. درسـتی جملات زیر را بررسـی کنید:

۱. ماهی‌گیری وجود دارد که دقیقاً ۲ ماهی صید کرده است.

۲. ماهی‌گیری وجود دارد که دقیقاً ۳ ماهی صید کرده است.

۳. حداقل یک ماهی‌گیر هسـت کـه کمتر از ۳ ماهی صید کرده است.

۴. حداقل یک ماهی‌گیر هسـت که بیشتر از ۳ ماهی صید کرده است.

۵. حداقل ۲ ماهی‌گیر هسـتند که بیشـتر از ۱ ماهی صید کرده‌اند.

(۱) لزوماً درسـت نیسـت. برای مثال ممکن است تعداد ماهی‌های صید شده ۱، ۱، ۱ و ۸ باشد.

(۲) لزوماً درسـت نیسـت. همان مثال قسمت قبل را در نظر بگیرید.

(۳) درست است. اگر چنین نباشد، یعنی هر کدام از آن‌ها حداقل سـه ماهی صید کرده باشند، آن‌گاه حداقل ۱۲ ماهی باید صید شده باشد که چنین نیست.

(۴) لزوماً صحیح نیسـت. برای مثال ممکن اسـت تعداد ماهی‌های صید شده ۲، ۳، ۳، ۳ باشد.

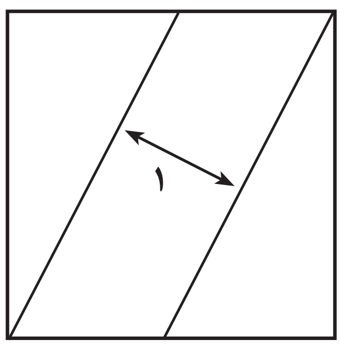
(۵) لزومـاً صحیح نیسـت. همان مثال قسـمت (۱) را در نظر بگیرید.

۱۱۴. در یک چایخانه سنتی چهار نوع کیک تهیه می‌شود. پنج نفر از دوستانم دیروز به آنجا رفتند و هر کدام دو کیک متفاوت برای خود سفارش دادند. مبالغی که آن‌ها پرداخت کردند عبارت بود از: ۶، ۹، ۱۱، ۱۲ و ۱۵ هزار تومان. امروز من به آنجا خواهم رفت و از هر نوع کیک یک عدد سفارش خواهم داد. چه‌قدر باید بپردازم؟

اگر قیمت کیک‌ها را $a\le b\le c\le d$ فرض کنیم، داریم:
$a+b\le a+c\le a+d,\ b+c\le b+d\le c+d.$
چون مبالغ پرداختی متفاوت است، پس سفارش‌ها هم دوبه‌دو متفاوت خواهند بود. از طرف دیگر: $\binom{4}{2}=6$.
پس دو نوع کیک هستند که با هم سفارش داده نشده‌اند.

فرض کنید قیمت این دو نوع کیک با هم برابر و x باشد. در نتیجه: $3(a+b+c+d)=53+x$. با در نظر گرفتن شش حالت متفاوت برای x و حل معادلات نتیجه خواهد شد: $x=10$ و $(a,b,c,d)=(2,4,7,8)$.

۱۱۵. مطابق شکل مربعی را با کشیدن دو خط موازی که فاصله‌شان یک متر است، به سه ناحیه با مساحت یکسان تقسیم کرده‌ایم. مساحت مربع را بیابید.



اگر طول ضلع مربع را a فرض کنیم. ضلع افقی دو مثلث کناری برابر $\frac{2a}{3}$ خواهد شد. با در نظر گرفتن مساحت متوازی‌الاضلاع داریم:

$$\frac{a^2}{3}=1\times\sqrt{a^2+\frac{4}{9}a^2}$$

در نتیجه: $a=\sqrt{13}$.

۱۱۶. عمل * روی اعداد صحیح به‌گونه‌ای تعریف شده است که خاصیت جابه‌جایی و شرکت‌پذیری دارد. همچنین، می‌دانیم برای هر $a\in Z$، $a*0=a$ و برای هر دو عدد صحیح a و b داریم: $a*(b+1)=(a*b)+(1-a)$.

الف) برای هر $a\in Z$ ثابت کنید: $a*1=1$.

ب) حاصل $(-3)*(-4)$ چه عددی است؟

ج) برای هر $a\in Z$ ثابت کنید: $a*4=4-3a$.

د) برای هر $a\in Z$ و هر $b\in N$ ثابت کنید:
$a*b=a+b-ab$

(الف)
$$a*1=a*(0+1)=a*0+(1-a)=a+1-a=1$$
(ب)
$$(-4)*(-3)=(-4)*(3*3)=((-4)*3)*3=11*3=-19$$

البته از قسمت (د) استفاده کردیم. پس کافی است (د) را ثابت کنیم تا (ج) نتیجه شود. (د) به روش استقرا روی b، حکم را ثابت می‌کنیم. برای $b=1$ حکم ثابت شده است (قسمت (الف)). فرض کنید حکم برای $b=k$ صحیح باشد. در نتیجه:

$$a*(k+1)=a*k+(1-a)=a+k-ak+1-a$$
$$=a+(k+1)-a.(k+1)$$

پس حکم برای $b=k+1$ نیز اثبات شد.

۱۱۷. تصاعدی حسابی با چهار جمله پیدا کنید که همهٔ جملاتش عدد اول باشند و بین تمام چنین تصاعدهایی کمترین مجموع جملات را داشته باشد.

اگر ۲ یا $d\overset{3}{\equiv}1$، آن‌گاه ۱ یا $2d\overset{3}{\equiv}2$ و در نتیجه a، $a+d$ و $a+2d$ به پیمانهٔ ۳، باقی‌مانده‌های متفاوت خواهند داشت. بنابراین یکی از آن‌ها مضرب سه است. پس $a=3$. اما در این حالت $a+3d$ نیز مضرب سه است که نشان می‌دهد اول نیست. پس d باید مضرب ۳ باشد. از طرف دیگر d حتماً زوج است، بنابراین d مضرب ۶ است. کمترین مقدار d برابر ۶ و کمترین مقدار مجموع چهار جمله برابر است با: ۵+۱۱+۱۷+۲۳؛ یعنی ۵۶. چون جمله اول نمی‌تواند ۳ باشد.

۱۱۸. آقای نوبخت ۴ فرزند دارد که یکی از آن‌ها (علی)، سنی بین ۱۳ تا ۱۹ سال دارد و

حاصل‌ضرب سن فرزندانش ۱۴۸۸ است. سن علی را پیدا کنید.

با تجزیهٔ ۱۸۴۸ به عامل‌های اول داریم:

$1848=2^3\times 3\times 7\times 11$

تنها مقسوم‌علیهی از ۱۸۴۸ که بین ۱۳ و ۱۹ قرار دارد، عدد ۷×۲ است. پس سن علی برابر است با ۱۴.

۱۱۹. چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد که ثلث و سه برابرش هم صحیح است؟

هر عدد طبیعی به‌صورت $n=3k$ در شرایط مسئله صدق می‌کند. پس بی‌شمار عدد طبیعی با شرایط مذکور وجود دارد.

۱۲۰. هواپیمایی با سرعت ثابت ۸۱۰ کیلومتر بر ساعت از شهر x به شهر y می‌رود و این مسیر را ظرف ۴ ساعت طی می‌کند؛ اما هنگام بازگشت، این مسیر را در ۵ ساعت طی می‌کند. اگر سرعت باد از سمت x به y را ثابت فرض کنیم، سرعت باد را به‌دست آورید.

اگر سرعت هواپیما و سرعت باد را v_1 و v_2 فرض کنیم، داریم: $v_1+v_2=810$ و $v_1-v_2=\frac{810\times 4}{5}$. در نتیجه $v_2=\frac{1}{2}(810-648)$. پس سرعت باد برابر است با ۸۱ کیلومتر بر ساعت.

۱۲۱. ثابت کنید معادلهٔ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}=1$ در مجموعه اعداد طبیعی فرد، جواب ندارد.

(برهان خلف) فرض کنید معادله جواب دارد. دو طرف تساوی را در abcdef ضرب می‌کنیم. طرف اول، حاصل جمع ۶ عدد فرد و در نتیجه زوج است، در حالی‌که طرف دوم abcdef فرد است (تناقض). پس معادله در مجموعه اعداد طبیعی فرد جواب ندارد.

۱۲۲. آیا می‌توان اعداد ۱ تا ۹ را پشت‌سرهم طوری چید که تعداد عددهای میان ۱ و ۲، میان ۲ و ۳، ... و میان ۸ و ۹، عددی فرد باشد؟

(برهان خلف) فرض کنید چنین ترتیبی وجود دارد. با استقرا می‌توان ثابت کرد که در چنین حالتی، باید تعداد اعداد بین هر دو عدد i و j نیز فرد باشد. با استقرا روی $k=i-j$ حکم را ثابت می‌کنیم. با فرض $i<j$، اگر: $i-j=1=k$ حکم برقرار است. فرض کنید تعداد اعداد بین i و $i+m$ فرد باشد. حال دو عدد i و $i+m+1$ را در نظر بگیرید. دو حالت برای $i+m$ وجود دارد:

الف) $i+m$ بین دو عدد i و $i+m+1$ قرار دارد: تعداد اعداد بین $i+m$ و $i+m+1$ فرد است. همچنین تعداد اعداد بین i و $i+m$ هم فرد است. در نتیجه تعداد اعداد بین i و $i+m+1$ نیز فرد است.

ب) $i+m$ بین دو عدد i و $i+m+1$ نیست: به طریق مشابه حکم نتیجه می‌شود. پس باید بین هر دو عدد i و j، تعداد اعداد فرد باشد که تناقض است.

۱۲۳. ثابت کنید عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری که جملات دنبالهٔ حسابی $a+b, a+2b, ..., a+nb$ همگی مرکب باشند. a و b دو عدد طبیعی ثابت‌اند.

متأسفانه در صورت این مسئله، اشتباهی صورت گرفته بود که به این صورت اصلاح می‌شود: جملات دنبالهٔ حسابی باید به‌صورت زیر باشند:

$na+b, (n-1)a+2b, (n-2)a+3b, ..., a+nb$

اکنون با این تغییر مسئله را خودتان حل کنید و در شماره‌های آینده حل آن را در همین قسمت ببینید.

۱۲۴. a و b دو عدد طبیعی‌اند، به‌طوری که a^2+b^2 بر ۲۱ بخش‌پذیر است. ثابت کنید a^2+b^2 بر ۴۴۱ بخش‌پذیر است.

چون a^2+b^2 مضرب ۲۱ است، پس a^2+b^2 هم مضرب ۳ است و هم مضرب ۷. با حالت‌بندی باقی‌مانده‌های a و b بر ۳ (و همچنین بر ۷) می‌توان ثابت کرد a و b هر دو باید مضرب ۳ و ۷ باشند (اثبات این قسمت را به‌عهده خودتان می‌گذاریم). در نتیجه a^2 و b^2 هر دو بر ۹ و ۴۹ بخش‌پذیرند و a^2+b^2 بر $49\times 9=441$ بخش‌پذیر است.

۱۲۵. یازده دانش‌آموز در اردویی تابستانی، پنج گروه پژوهشی تشکیل داده‌اند. ثابت کنید که می‌توان دو دانش‌آموز مانند A و B طوری پیدا کرد که هر گروه پژوهشی که شامل دانش‌آموز A باشد، شامل دانش‌آموز B هم باشد.

گروه‌های پژوهش را با اعداد ۱ تا ۵ شماره‌گذاری می‌کنیم. حال به‌هر دانش‌آموز شمارهٔ گروه‌هایی را که عضو آن‌هاست، نسبت می‌دهیم. یازده مجموعه تشکیل

می‌شود. زیرمجموعه‌های $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ را به ۱۰ دستهٔ زیر تقسیم می‌کنیم. هر دسته دارای این ویژگی است که هر دو عضو یک دسته مانند A و B را که در نظر بگیریم، یا $A\subset B$ و یا $B\subset A$.

(۱) $\varnothing, \{۱\}, \{۱,۲\}, \{۱,۲,۳\}, \{۱,۲,۳,۴\}, \{۱,۲,۳,۴,۵\}$

(۲) $\{۲\}, \{۲,۵\}, \{۱,۲,۵\}, \{۱,۲,۳,۵\}$

(۳) $\{۳\}, \{۱,۳\}, \{۱,۳,۴\}, \{۱,۳,۴,۵\}$

(۴) $\{۴\}, \{۱,۴\}, \{۱,۲,۴\}, \{۱,۲,۴,۵\}$

(۵) $\{۵\}, \{۱,۵\}, \{۱,۳,۵\}$

(۶) $\{۲,۴\}, \{۲,۴,۵\}, \{۲,۳,۴,۵\}$

(۷) $\{۳,۴\}, \{۳,۴,۵\}$

(۸) $\{۳,۵\}, \{۲,۳,۵\}$

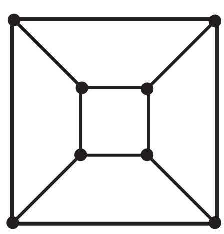
(۹) $\{۴,۵\}, \{۱,۴,۵\}$

(۱۰) $\{۲,۳\}, \{۲,۳,۴\}$

در نتیجه با انتخاب یازده مجموعه، طبق اصل لانه کبوتر، دو تا از آن‌ها از یک دسته هستند و در نتیجه یکی از آن‌ها زیرمجموعهٔ دیگری خواهد بود.

۱۲۶. طول تکه سیمی ۱۲۰ سانتی‌متر است. آیا می‌توان با استفاده از آن (بدون بریدن) اسکلت مکعبی را ساخت که طول هر یالش ۱۰ سانتی‌متر باشد؟

امکان‌پذیر نیست، چرا که انجام این کار معادل با این است که گراف مکعب (شکل زیر) اویلری باشد. یعنی بتوان از یک رأس شروع به حرکت کرد و از همهٔ یال‌ها هر کدام دقیقاً یک‌بار گذشت. اما در گراف اویلری همهٔ رئوس باید از درجه زوج باشند.



۱۲۷. ثابت کنید هر پنج‌ضلعی محدب، سه قطر دارد که می‌توان با آن‌ها یک مثلث رسم کرد.

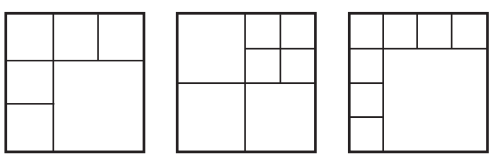
بزرگ‌ترین قطر این پنج‌ضلعی، مثلاً XY را در نظر بگیرید. دو تا از رئوس پنج‌ضلعی در یک طرف قطر قرار دارند و بنابراین دو قطر متقاطع وجود دارند که یک سر هر یک از آن‌ها به‌ترتیب X و Yاند. اکنون به آسانی می‌توان دریافت که از برخورد این سه قطر یک مثلث تشکیل می‌شود.

۱۲۸. دو بازیکن به نوبت اسب‌هایی را روی خانه‌های صفحهٔ شطرنج می‌گذارند که هیچ‌یک از آن‌ها دیگری را تهدید نکند. بازیکنی که نتواند این کار را انجام دهد می‌بازد. چه کسی راهبرد برد دارد؟

چون اسب همیشه از خانه‌ای سیاه به خانه‌ای سفید می‌رود یا برعکس، بازیکن دوم می‌تواند با استفاده از تقارن نسبت به مرکز صفحهٔ شطرنج، بازی را ببرد.

۱۲۹. فرض کنید n، عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۵ است. ثابت کنید هر مربع را می‌توان فقط با برش‌های افقی و عمودی، به n مربع تقسیم کرد.

برای مقادیر ۶، ۷ و ۸ شکل‌های زیر را در نظر بگیرید:
حال اگر حکم برای $n=k$ صحیح باشد، آن‌گاه برای $n=k+۳$ نیز درست است. کافی است بعد از افراز مربع به k مربع کوچک‌تر، یکی از مربع‌ها را به ۴ مربع هم‌اندازه افراز کنیم تا تعداد کل مربع‌ها برابر $k+۳$ باشد.



n=۸   n=۷   n=۶

۱۳۰. در جدولی از m سطر و n ستون، خانهٔ محل برخورد سطر fاُم و ستون gاُم را علامت گذاشته‌ایم. چند تا از مستطیل‌هایی که از خانه‌های این جدول تشکیل شده‌اند، این خانهٔ علامت‌دار را دربردارند؟

کافی است دو خط عمودی و دو خط افقی انتخاب کنیم، طوری که از تقاطع آن‌ها مستطیل مطلوب حاصل شود. تعداد انتخاب‌ها برای این چهار خط، برابر p، q، $m-p+۱$ و $n-q+۱$ و در نتیجه تعداد کل مستطیل‌ها برابر است با: $N=pq(m-p+۱)(n-q+۱)$.